



TITLE:

# 圧力安定化特性曲線有限要素スキーム (数値解析における理論・手法・応用)

AUTHOR(S):

野津, 裕史; 田端, 正久

---

CITATION:

野津, 裕史 ...[et al]. 圧力安定化特性曲線有限要素スキーム (数値解析における理論・手法・応用). 数理解析研究所講究録 2009, 1638: 112-117

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140535>

RIGHT:

# 圧力安定化特性曲線有限要素スキーム A pressure-stabilized characteristic-curve finite element scheme

九州大学大学院数理学研究院

野津 裕史 (Hirofumi NOTSU)\* 田端 正久 (Masahisa TABATA)†

Faculty of Mathematics, Kyushu University

## 1 はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) を有界領域,  $\Gamma \equiv \partial\Omega$  を  $\Omega$  の境界とし, Navier-Stokes 方程式;

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nabla(2\nu D(u)) + \nabla p = f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot u = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = g, & (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \\ u = u^0, & x \in \Omega, t = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

を満たす関数  $(u, p): \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  を求める問題を考える. ここに,  $u, p$  はそれぞれ流速と圧力を表し,  $\nu > 0$  は粘性係数,  $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, g: \Gamma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, u^0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  は与えられた関数である.  $D(u)$  は変形速度テンソル,

$$D_{ij}(u) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, \dots, d),$$

であり,

$$[\nabla D(u)]_i \equiv \sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} \quad (i = 1, \dots, d),$$

である.

特性曲線有限要素スキーム [2, 8, 9, 11] は現れる行列が対称であり, 連立一次方程式の求解において利点がある. しかしながら, これらのスキームは下限上限条件 [4] を満たす要素 (P2/P1 要素など) を用いるため, 大きなメモリ量が要請される. 我々はこの点を改善した圧力安定化特性曲線有限要素スキーム [7, 6] を開発した. 本スキームは, 移流項の近似に特性曲線法, 要素選択に P1/P1 要素を採用し, 圧力安定化手法 [3] を適用した解法である. 現れる行列が対称であり, 大規模数値計算に有用である. 本稿では, スキームを述べたあと, 3次元数値計算により信頼性と実用計算における有用性を確認する.

\*E-mail : notsu@math.kyushu-u.ac.jp

†E-mail : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

## 2 有限要素スキーム

時間刻み  $\Delta t$  と関数  $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  に対して, 関数  $X_1(w, \Delta t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  を

$$X_1(w, \Delta t)(x) \equiv x - w(x)\Delta t$$

で定義する. 記号  $\circ$  は関数の合成を表し,  $\Omega$  上の関数  $\psi$  に対して

$$\psi \circ X_1(w, \Delta t)(x) \equiv \psi(X_1(w, \Delta t)(x))$$

とする.  $t^n \equiv n\Delta t$  とし,  $\Omega \times (0, T)$  または  $\Gamma \times (0, T)$  上の関数  $\psi$  に対して  $\psi^n \equiv \psi(\cdot, t^n)$  とする.  $N_T \equiv [T/\Delta t]$  とする.  $\mathcal{T}_h \equiv \{K\}$  を領域  $\Omega$  の三角形 (四面体) 分割とする. 近似領域を

$$\Omega_h \equiv \text{int} \bigcup \{K; K \in \mathcal{T}_h\}$$

とし,  $\Gamma_h \equiv \partial\Omega_h$  とする.  $g \in C^0(\Gamma \times [0, T])^d$  とし, P1/P1 有限要素空間を

$$\begin{aligned} X_h &\equiv \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}_h)^d; v_h|_K \in P_1(K)^d, \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ M_h &\equiv \left\{ q_h \in C^0(\overline{\Omega}_h); q_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ V_h(g^n) &\equiv \left\{ v_h \in X_h; v_h(P) = g^n(P), \forall P: \Gamma_h \text{ 上の節点} \right\}, \\ Q_h &\equiv \left\{ q_h \in M_h; (q_h, 1) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

により定義し,  $V_h \equiv V_h(0)$  とする. 同じ記号  $\Pi_h$  で  $C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])^d$  から  $X_h$  または  $C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])$  から  $M_h$  への補間作用素を表す.  $f \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])$  とし  $f_h^n \equiv \Pi_h f^n$  とする.  $u, w \in H^1(\Omega_h)^d$  に対して  $V_h$  上の一次形式  $\mathcal{M}_h(u, w, \Delta t)$ ,  $\mathcal{F}_h^n$  をそれぞれ

$$\langle \mathcal{M}_h(u, w; \Delta t), v_h \rangle \equiv \left( \frac{u - w \circ X_1(w, \Delta t)}{\Delta t}, v_h \right), \quad \langle \mathcal{F}_h^n, v_h \rangle \equiv (f_h^n, v_h),$$

とし,  $H^1(\Omega_h)^d \times H^1(\Omega_h)^d, H^1(\Omega_h)^d \times L^2(\Omega_h), H^1(\Omega_h) \times H^1(\Omega_h)$  上の双一次形式  $a_h, b_h, \mathcal{C}_h$  をそれぞれ,

$$a_h(u, v) \equiv 2\nu(D(u), D(v)), \quad b_h(v, q) \equiv -(\nabla \cdot v, q), \quad \mathcal{C}_h(p, q) \equiv -\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla p, \nabla q)_K,$$

とする. ここで,  $\delta$  は正定数,  $h_K$  は要素  $K$  の直径,  $(\cdot, \cdot)_K$  は  $L^2(K)^d$  内積である.

$u^0$  の近似関数  $u_h^0$  を与えて (1) のための圧力安定化特性曲線有限要素スキーム;

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_h(u_h^n, u_h^{n-1}; \Delta t), v_h \rangle + a_h(u_h^n, v_h) + b_h(v_h, p_h^n) + b_h(u_h^n, q_h) + \mathcal{C}_h(p_h^n, q_h) &= \langle \mathcal{F}_h^n, v_h \rangle, \\ \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h, n = 1, \dots, N_T, \end{aligned} \quad (2)$$

により  $\{(u_h^n, p_h^n) \in V_h(g^n) \times Q_h; n = 1, \dots, N_T\}$  を求める.

### 3 数値計算結果

スキームは対称なため、点ヤコビ前処理付 CG 法および CR 法を用いた [1, 5]. 合成関数を含む項の数値積分に、2 次の数値積分公式 [10] を用いた. ノルム空間  $X$  の関数集合  $\{\psi^n\}_{n=1}^{N_T}$  に対して、ノルム  $\|\cdot\|_{L^2(X)}$  を

$$\|\psi\|_{L^2(X)} \equiv \left\{ \Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_X^2 \right\}^{1/2}$$

で定義する.  $(u, p)$ ,  $(u_h, p_h)$  をそれぞれ (1), (2) の解とする. 誤差として

$$Err \equiv \frac{\|\Pi_h u - u_h\|_{L^2(H^1(\Omega)^d)} + \|\Pi_h p - p_h\|_{L^2(L^2(\Omega))}}{\|u_h\|_{L^2(H^1(\Omega)^d)} + \|p_h\|_{L^2(L^2(\Omega))}}$$

を用いる. 以下の例 1 において、スキーム (2) の厳密解への数値的収束精度を調べる.

**例 1 (テスト問題).** 問題 (1) において、 $\Omega = (0, 1)^3$ ,  $T = 1$ ,  $\nu = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  とする. 厳密解は

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} (x, t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + 2x_2 + x_3 + t) - \sin(x_1 + x_2 + 2x_3 + t) \\ -\sin(2x_1 + x_2 + x_3 + t) + \sin(x_1 + x_2 + 2x_3 + t) \\ \sin(2x_1 + x_2 + x_3 + t) - \sin(x_1 + 2x_2 + x_3 + t) \\ \sin(x_1 + x_2 + x_3 + t) - 8\sin^3(1/2)\sin(t + 3/2) \end{pmatrix}$$

である.

$\delta = 0.05$ ,  $u_h^0 \equiv \Pi_h u^0$  とした.  $N_\Omega$  を立方体領域の一辺の分割数,  $h \equiv 1/N_\Omega$  とする.  $\Delta t = h$  とし,  $N_\Omega = 4, 8, 16, 32, 64$  に対してほぼ一様なメッシュで計算を行った. 図 1 左図は  $N_\Omega = 8$  のメッシュであり, 右図は  $\Delta t$  に対する  $Err$  の両対数グラフである.  $\Delta t (= h)$  に関して概ね 1 次精度である結果が得られた.

$Re \equiv 1/\nu$  とする. 以下の 3 次元合法キャビティ流れ問題 ( $Re = 1,000$ ) の数値計算結果を述べる.

**例 2 (合法キャビティ流れ問題,  $Re = 1,000$ ).** (1) において  $\nu = 10^{-3}$ ,  $f = 0$ ,

$$g_1(x, t) = \begin{cases} 16x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) & (x_3 = 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad g_2 = g_3 = 0,$$

とし,  $u^0$  は各メッシュでの定常 Stokes 方程式の解とした (図 2).

スキーム (2) において  $\delta = 0.05$  とした. 境界層を考慮して, 図 3 の非一様な 2 つのメッシュを採用した. 左図をメッシュ F (Fine mesh), 右図をメッシュ C (Coarse mesh) と呼ぶ. メッシュ F のとき  $\Delta t = 1/32$ , メッシュ C のとき  $\Delta t = 1/24$  とした. 両メッシュにおいて解は数値的に定常解に収束した. 図 4 の上左図は両メッシュでの定常解の  $u_{h1}(0.5, 0.5, \cdot)$ ,  $u_{h3}(\cdot, 0.5, 0.5)$  のグラフであり, ほぼ一致している. 図 4 の上右, 下左, 下右図は, メッシュ F による定常解の流速ベクトルを各平面に射影した図であり, 流れの特徴が捉えられている.

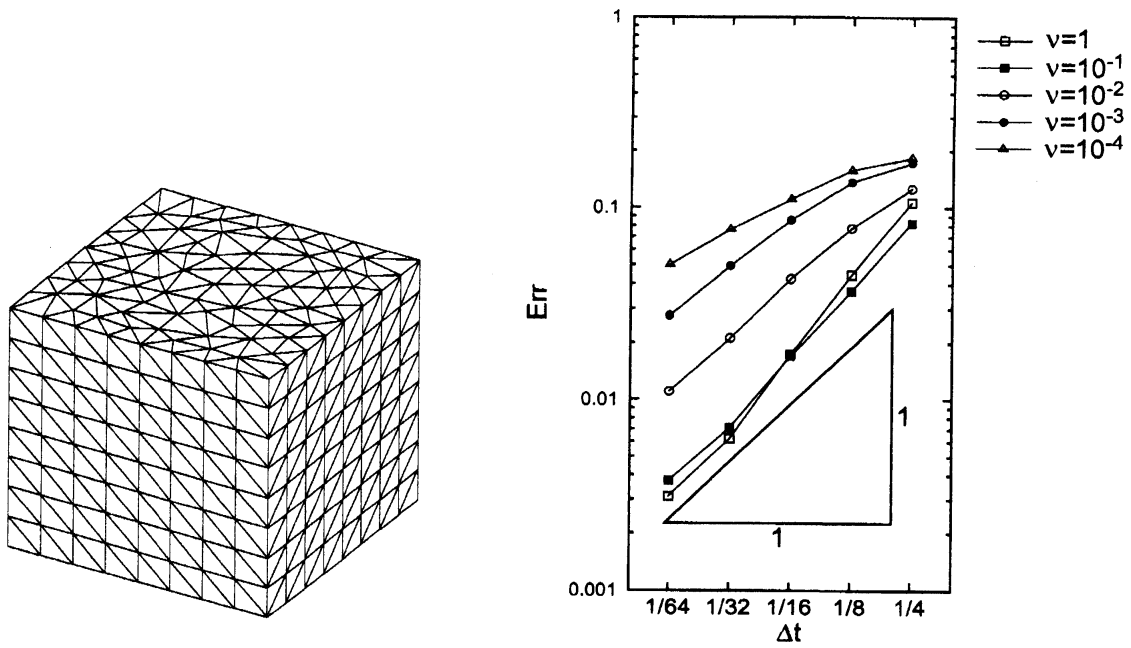


図 1:  $N_{\Omega} = 8$  のメッシュ (左) および  $\Delta t$  に対する  $Err$  の両対数グラフ (右).

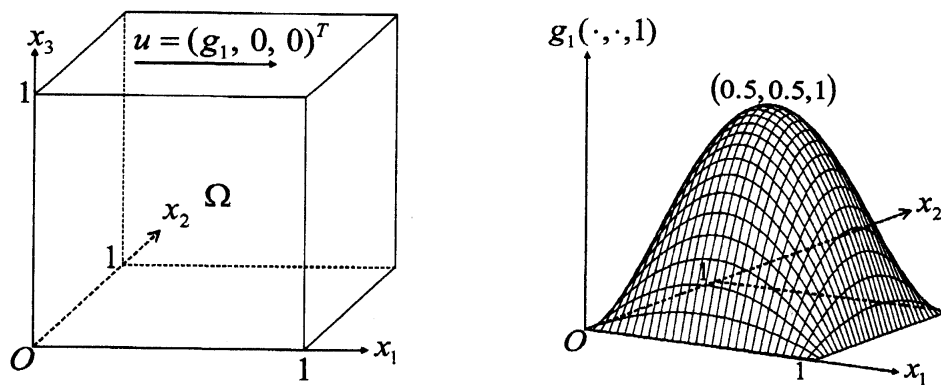


図 2: 問題 2 の設定 (左) と  $g_1(\cdot, \cdot, 1)$  のグラフ (右).

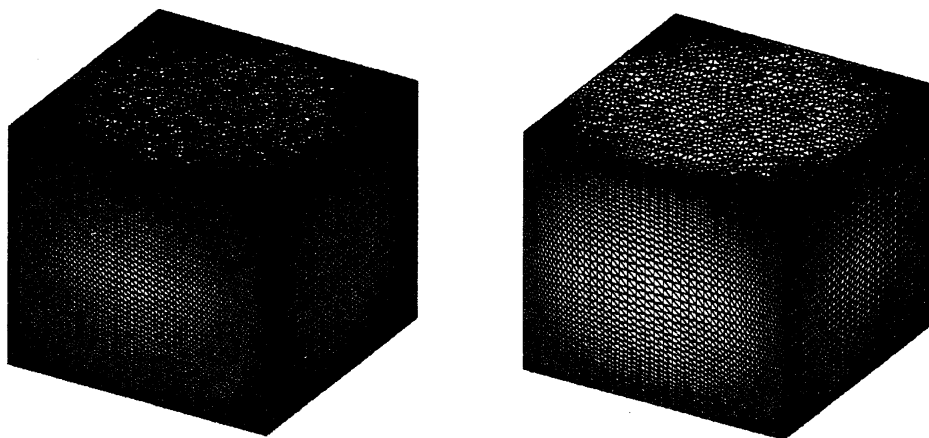


図 3: 例 2 に用いたメッシュ, 左: Fine mesh ( $N_{\Omega} = 64$ ), 右: Coarse mesh ( $N_{\Omega} = 48$ ).

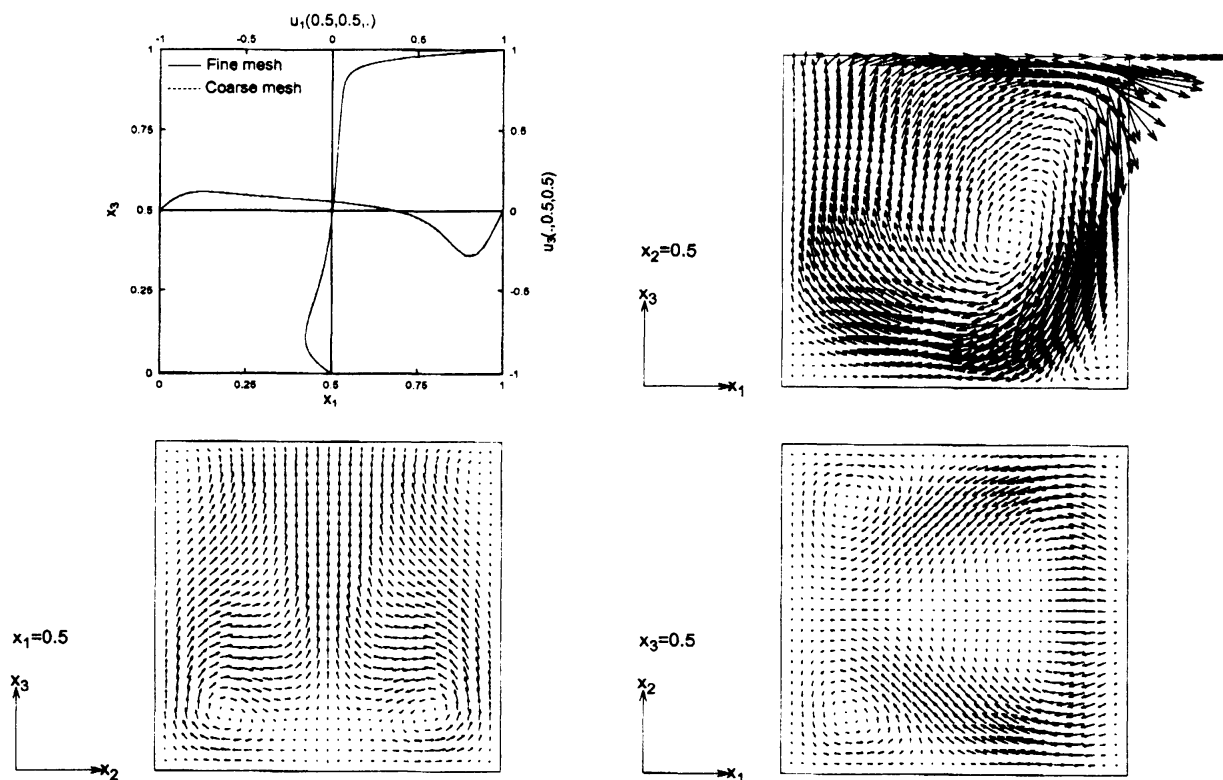


図 4: 両メッシュでの  $u_{h1}(0.5, 0.5, \cdot)$  および  $u_{h3}(\cdot, 0.5, 0.5)$  のグラフ (上左) と流速ベクトルの各平面への射影図 ( $x_2 = 0.5$  (上右),  $x_1 = 0.5$  (下左),  $x_3 = 0.5$  (下右)).

## 4 結び

Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームを述べた. スキームは対称で, 大規模数値計算に有用である. 3次元テスト問題において, スキームの数値的収束精度が空間および時間について1次であることが観察され, 信頼性を確認できた.  $Re = 1,000$  の3次元合法キャビティ流れ問題において, 流れの特徴を捉えた有限要素解を得られた. これはスキームの実用性を示す結果であるといえる.

## 謝辞

本研究は, 日本学術振興会科学技術研究費補助金基盤研究 (S), No. 16104001 から支援を受けた.

## 参考文献

- [1] Barrett, R., Berry, M., Chan, T.F., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and van der Vorst, H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, 1994.

- [2] Boukir, K., Maday, Y., Métivet, B. and Razafindrakoto, E., A high-order characteristics/finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 1997, pp. 1421–1454.
- [3] Brezzi, F. and Douglas Jr., J., Stabilized mixed methods for the Stokes problem, *Numerische Mathematik*, **53**, 1988, pp. 225–235.
- [4] Girault, V. and Raviart, P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 1986.
- [5] 森正武, 杉原正顕, 室田一雄, 線形計算, 岩波, 東京, 1994.
- [6] Notsu, H., Numerical computations of cavity flow problems by a pressure stabilized characteristic-curve finite element scheme, *Transactions of Japan Society for Computational Engineering and Science*, **2008**, 2008, No.20080032.
- [7] 野津裕史, 田端正久, Navier-Stokes 方程式のための圧力安定化・特性曲線法結合有限要素スキーム, 日本応用数理学会論文誌, **18**, No. 3, 2008, pp. 427–445.
- [8] Notsu, H. and Tabata, M., A single-step characteristic-curve finite element scheme of second order in time for the incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Scientific Computing*, **38**, No.1, 2009, pp.1–14.
- [9] Pironneau, O., On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, **38**, 1982, pp. 309–332.
- [10] Stroud, A. H., *Approximate calculation of multiple integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [11] Süli, E., Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations, *Numerische Mathematik*, **53**, 1988, pp. 459–483.